



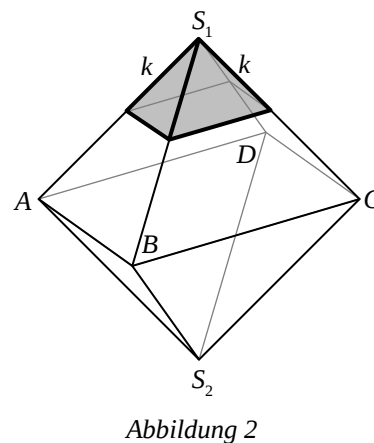
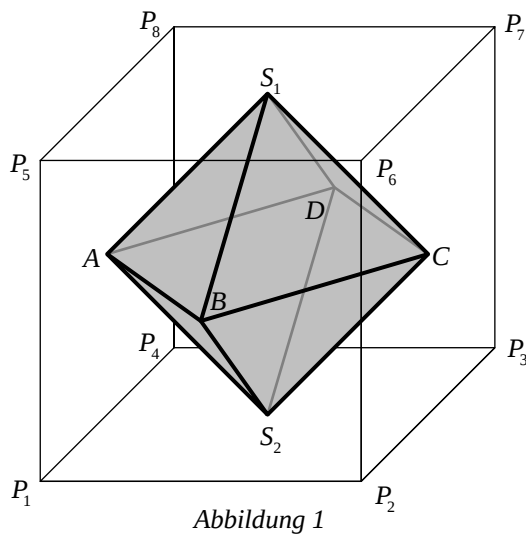
Name: _____

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Oktaeder ist ein regelmäßiges Polyeder, dessen Oberfläche aus acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht. Jedes Oktaeder kann einem Würfel so eingeschrieben werden, dass die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen des Würfels liegen (siehe *Abbildung 1*).



Gegeben sind die Punkte $A(13|-5|3)$, $B(11|3|1)$, $C(5|3|7)$ und $S_1(13|1|9)$.

- a) Begründen Sie: Die Punkte $A(13|-5|3)$, $B(11|3|1)$ und $C(5|3|7)$ sind die Eckpunkte eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass die Punkte A , B , C und D ein Quadrat bilden. (8 Punkte)



Name: _____

b) Die Ebene E enthält das Quadrat $ABCD$.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform.

[Zur Kontrolle: $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 27 = 0$] (7 Punkte)

c) Der Punkt $S_1(13|1|9)$, der nicht in der Ebene E liegt, wird an der Ebene E gespiegelt, so dass der zu S_1 symmetrisch liegende Spiegelpunkt S_2 entsteht.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S_2 .

Begründen Sie: Der Körper mit den Eckpunkten A, B, C, D, S_1 und S_2 ist ein Oktaeder. (11 Punkte)

d) Das Oktaeder $ABCDS_1S_2$ ist gemäß *Abbildung 1* einem Würfel so einbeschrieben, dass die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen dieses Würfels liegen.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte P_6 und P_8 des Würfels. (10 Punkte)

e) Von dem Oktaeder $ABCDS_1S_2$ wird ein pyramidenförmiges Stück so abgeschnitten, dass die Pyramidenspitze der Punkt S_1 ist und die von S_1 ausgehenden Kanten der abgeschnittenen Pyramide die gleiche Länge k haben (siehe *Abbildung 2*).

Ermitteln Sie das Volumen der abgeschnittenen Pyramide für den Fall, dass ihre Kantenlänge k ein Drittel der Länge der Oktaederkante $\overline{AS_1}$ beträgt.

Nun werden von allen weiteren Ecken des Oktaeders $ABCDS_1S_2$ gleich große Pyramiden mit der Kantenlänge k abgeschnitten, so dass ein Restkörper R_k entsteht.

Beschreiben Sie diesen Restkörper R_k für den Fall $k = \frac{1}{3}|\overline{AS_1}|$ hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen (Anzahl der Ecken, Seitenlängen).

Beschreiben Sie den Restkörper R_k für den Fall $k = \frac{1}{2}|\overline{AS_1}|$ hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen. (14 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung